



Országos Matematikaolimpia
Megyei forduló - 2026. március 7.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. Legyen $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ egy invertálható mátrix, amelyre teljesül, hogy

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Igazold, hogy

$$\det(A + A^{-1}) = (\text{Tr}(A))^2,$$

ahol $\text{Tr}(A)$ az A mátrix főátlójában álló elemek összege.

2. feladat. Legyen $(x_n)_{n \geq 1}$ egy valós számokból álló sorozat, amelyre $x_1, x_2 \in (0, 1)$ és

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$.

b) Számold ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$ határértéket!

Gazeta Matematică

3. feladat. Adott egy $n \geq 2$ természetes szám. Határozd meg az összes olyan $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixot, amelyre teljesül, hogy ha az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrixokra $AB = M$, akkor $BA = M$.

4. feladat. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos és nem konstans függvény. Értelmezzük a $g : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$g(y) = \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}, \text{ minden } y \in \text{Im}(f) \text{ esetén,}$$

ahol $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$. Igazold, hogy a g függvény akkor és csak akkor folytonos, ha létezik olyan $a \in (0, 1]$, amelyre f szigorúan monoton a $[0, a]$ intervallumon, és $\text{Im}(f) = f([0, a])$.

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatra legfeljebb 22,5 pont szerezhető.